УДК 538.913 538.931 538.971 539.219.3

В. М. Журавлев, И. О. Золотовский, В. М. Морозов

ОБ УСЛОВИЯХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ СТРУКТУР В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Развит метод вычисления длинноволновых асимптотик решений нелинейных диффузионных уравнений и их систем. Основной целью работы является получение критериев роста пространственно-периодических возмущений и образования регулярных длинноволновых структур в случае постоянного по пространству и времени внешнего источника дефектов в нелинейных диффузионных системах.

Материалы и методы. Предлагаемый метод вычисления длинноволновых асимптотик решений основан на одном из вариантов метода многомасштабных разложений с коррекцией сходимости рядов с помощью устранения резонансов. Малым параметром служит отношение скорости диффузионного переноса к скорости локальной релаксации флуктуаций концентраций. Подход позволяет связать параметры диффузии для амплитуд процесса релаксации с характеристиками внешних источников компонентов среды. В результате удается получить критерии роста длинноволновых периодических составляющих диффузионного процесса переноса компонентов среды, связав их с величиной внешних источников. Метод распространяется на случай многокомпонентных сред. Процедура вывода уравнений для амплитуд процесса переноса проводится для общего класса нелинейных диффузионных уравнений с общего вида нелинейными коэффициентами диффузии и нелинейными источниками. Исследуется роль нелинейной релаксации в формировании периодических структур в асимптотике больших периодов времени.

Результаты. На основе предлагаемого подхода получены критерии асимптотического роста длинноволновых возмущений для общей функциональной зависимости коэффициента диффузии от концентрации дефектов и малых нелинейных источников в правой части уравнений. Аналогичные критерии получены для систем диффузионных уравнений, описывающих процесс переноса в многокомпонентной среде. Обнаружен эффект асимптотического подавления роста длинноволновых пространственно-периодических флуктуаций в случае квадратичной нелинейности источника в нулевом порядке возмущений.

Выводы. Полученные в работе критерии роста пространственно-периодических длинноволновых возмущений дают возможность объяснить возникновение регулярных структур в средах, подвергнутых постоянному внешнему облучению. Такой подход может применяться как для задач лазерного облучения материалов, так и для облучения материалов потоками нейтронов или других типов радиации.

Ключевые слова: нелинейная диффузия, регулярные структуры в конденсированных средах, внешнее облучение материалов.

V. M. Zhuravlev, I. O. Zolotovskiy, V. M. Morozov

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 14.Z50.31.0015).

ON OCCURRENCE CONDITIONS OF REGULAR STRUCTURES IN CONDENSED MEDIA UNDER EXTERNAL RADIATION

Abstract.

Background. The authors have established a method for calculating long-distance asymptotic solutions of nonlinear diffusion equations and their systems. The main purpose of this work is to obtain the growth criteria for space-periodic disturbances and formation of regular long-wave structures in conditions of a space- and time-constant external source of defects in non-linear diffusion systems.

Materials and methods. The proposed method for calculating long-wave asymptotic solutions is based on one of the variants of the method of multiscale expansions with correction of convergence of series by resonances elimination. The ratio of the diffusion transfer rate to the relaxation rate of local concentration fluctuations is considered as a series expansion parameter. The approach makes it possible to link the diffusion parameters for relaxation process amplitudes with the characteristics of external components of the environment. As a result, it is possible to obtain the growth criteria for long-wave periodic components of the diffusion process of environmental components transfer, linking them with the value of external sources. The method applies to the case of multi-media. The procedure of deriving the equations for the transfer process amplitudes was carried out for a general class of non-linear diffusion equations in a general form by nonlinear diffusion coefficients and non-linear springs. The authors investigated the importance of nonlinear relaxation in formation of periodic structures in asymptotics of long periods of time.

Results. On the basis of the proposed approach the authors obtained the criteria of asymptotic growth of long-wave perturbations for the total functional dependence of the diffusion coefficient on concentration of defects and small nonlinear sources in the right part of the equation. Similar criteria were obtained for systems of diffusion equations that describe the migration process in multi-component media. The researchers have discovered an effect of suppressing the growth of long-wave asymptotic space-periodic fluctuations in the case of a quadratic nonlinear source in the zero order perturbation.

Conclusions. The obtained growth criteria for spatially periodic long-wave perturbations provide an opportunity to explain occurrence of regular structures in environments, subjected to constant external radiation. This approach can be used for both problems of laser irradiation of materials and material flows for irradiating neutrons or other types of radiation.

Key words: nonlinear diffusion, regular structures in condensed matter, external radiation materials.

Введение

В настоящее время существует значительное число экспериментальных фактов, указывающих на формирование в конденсированных средах регулярных структур, в том числе периодических и квазипериодических, под действием внешнего облучения в форме либо лазерных импульсов [1–6], либо потоков заряженных частиц, нейтронов или γ-квантов [7, 8]. Одной из важных особенностей, возникающих при этом структур, является то, что их длина волны оказывается значительно больше, чем шаг кристаллической решетки. При этом у модифицированных таким образом материалов возникают специфические полезные свойства, что может служить фактором для пристального их изучения. Одним из вариантов объяснения возникающих периодических структур является предположение, что основную роль в их формировании играют нелинейные эффекты, в частности нелинейная диффузия [9, 10]. В таком подходе предполагается, что увеличение концентрации дефектов уменьшает скорость их диффузионного переноса, что и приводит к формированию больших кластеров дефектов в среде. Можно ожидать, что при таком поведении среды основную роль должна играть специфическая нелинейная зависимость коэффициента диффузии от концентрации дефектов или компонентов среды. Поскольку явление возникновения периодических структур наблюдается для широкого круга физических систем, часто не имеющих общего происхождения, как, например, системы под лазерным облучением и системы под радиационным облучением, то можно ожидать, что такие явления являются свойством самого процесса диффузии в нелинейной среде, а точнее, свойством асимптотического по времени поведения диффузионных процессов в нелинейных средах с внешним источником.

Асимптотический анализ нелинейных диффузионных систем может проводиться на основе метода многомасштабных разложений [11]. Основанием для разделения пространственных и временных масштабов на «большие» и «малые» может служить сам факт наблюдения длиннопериодических пространственных структур в реальных физических системах. Сами большие масштабы пространственных изменений концентраций в таких системах указывают на то, что скорость диффузионного переноса в них мала и должна быть значительно меньше, чем изменения в концентрациях компонентов среды, возникающие в результате локальной релаксации флуктуаций концентрации компонентов среды. Эти факты позволяют в качестве малого параметра при анализе нелинейных диффузионных процессов рассматривать отношение времени локальной релаксации к характерному времени диффузионного переноса. Как следствие, в системе возникает большой пространственный масштаб, который соответствует таким пространственным структурам, диффузия в которых способна не размывать флуктуации, а приводить к их росту. В таком подходе особую роль играет внешний однородный источник, который играет роль критического параметра, что и отражает суть наблюдаемых явлений образования регулярных структур лишь при определенных характеристиках внешнего воздействия.

В настоящей работе реализуется эта общая программа вычисления уравнений, описывающих рост периодических составляющих пространственного распределения концентраций компонентов среды. Уравнения выводятся вначале для однокомпонентной среды. Выводятся уравнения для медленно меняющихся амплитуд процесса локальной релаксации флуктуаций и вычисляются условия их роста со временем. Отдельно исследуется вопрос о роли нелинейного режима локальной релаксации. Затем развитый метод применяется к системам уравнений, описывающих динамику образования структур в средах с множеством различных компонентов. В заключении обсуждается вопрос о сопоставлении полученных критериев к реальным средам.

1. Нелинейные диффузионные уравнения

Поскольку функциональная зависимость коэффициента диффузии от концентрации часто выясняется не с помощью теоретических расчетов, а непосредственно с помощью эмпирических формул, то для анализа возможности возникновения в средах структур полезно рассматривать общие формы функциональной зависимости коэффициента диффузии от концентрации, которые можно представить в виде формального ряда Тейлора в нуле:

$$D = D(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{[k]}(0)}{k!} n^k, \tag{1}$$

где

$$D^{[k]}(0) = \left. \frac{d^k D(n)}{dn^k} \right|_{n=0}.$$

Уравнение диффузии дефектов в общем случае можно записать так:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left(D(n) \frac{\partial n}{\partial z^\alpha} \right) - \mu n + \gamma J(n) + G. \tag{2}$$

Здесь τ – время; z^α, $\alpha = 1,2,3$, – пространственные координаты; $D(n)$ – коэффициент диффузии как функция концентрации общего вида. Источник в правой части этого уравнения содержит нелинейную часть $J(n)$, которая является безразмерной функцией концентрации общего вида, удовлетворяющая двум условиям: $J(0) = 0$ и $J'(0) = 0$, так что

$$J(n) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{J^{[k]}(0)}{k!} n^k.$$

Величина G при этом описывает внешний источник.

Обезразмерим это уравнение, вводя следующие масштабные коэффициенты: N_0 – масштаб числа дефектов, a – масштаб длины, связанный с шагом кристаллической решетки, τ_0 – масштаб времени. Соответствующие безразмерные переменные таковы: $x^\alpha = z^\alpha / a$, $\xi = n / N_0$, $t = \tau / \tau_0$. В результате имеем:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \Delta F(\xi) - \mu \tau_0 \xi + \frac{\gamma \tau_0}{N_0} P(\xi) + \frac{\tau_0 G}{N_0},$$

где Δ – оператор Лапласа в декартовой системе безразмерных координат $x^\alpha, \alpha = 1,2,3$, и введено обозначение: $P(\xi) = J(N_0 \xi)$. Полагая $\mu > 0$, для удобства выберем τ_0 таким образом, что $\mu \tau_0 = 1$. Функция $F(\zeta)$ имеет вид

$$F(\zeta) = \frac{D_0}{a^2 |\mu|} \frac{1}{N_0} \int \frac{D(n)}{D_0} dn.$$

Безразмерный коэффициент $\varepsilon = \gamma (\mu N_0)^{-1}$ будем считать малым параметром, который будет определять масштабы возникающих структур. Уравнение для безразмерной величины ξ примет теперь такой вид:

$$\xi_t = \Delta F(\xi) - \xi + \varepsilon P(\xi) + g, \tag{3}$$

где ξ_t – производная по переменной t и $g = G/(|\mu| N_0)$.

2. Многомасштабные разложения

Наряду со стандартными единичными масштабами времени, ответственными за переходные процессы в системе, решения уравнения (3) содержит зависимость и от медленных переменных времени $T = \varepsilon t$, и координат $X^\alpha = \sqrt{\varepsilon} x^\alpha$ ($X = (X^1, X^2, X^3)$), где ε – безразмерный малый параметр в (3). В этом случае зависимость функции ξ от координат и времени может быть представлена в виде ряда разложения по малому параметру ε:

$$\xi(x,t) = \chi(t, X, T, \varepsilon) = \xi_0(t, X, T) + \xi_1(t, X, T)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \tag{4}$$

Используя стандартные для метода многомасштабных разложений соотношения [11]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \chi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial T}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} = \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \chi}{\partial X^\alpha}, \quad \alpha = 1,2,3,$$

уравнение (3) приводим к виду

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \chi - g = \varepsilon P(\chi) - \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial T} + \varepsilon \Delta_X F(\chi), \tag{5}$$

где Δ_X – оператор Лапласа по медленным координатам. Безразмерная величина g в этом уравнении, рассматривается далее как величина, зависящая от медленных координат и времени: $g = g(X,T)$. Это условие позволит выявить особенности взаимодействия внешнего фона с медленными процессами диффузии.

3. Уравнения для амплитуд

Коэффициенты разложения функции ξ по ε в первых двух порядках удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\xi_{0,t} = -\xi_0 + g, \quad \xi_{1,t} = -\xi_1 - \frac{\partial \xi_0}{\partial T} + \Delta_X F(\xi_0) + P(\xi_0).$$

Здесь использовалось разложение функций $F(\chi)$ и $P(\chi)$ в нуле. Например:

$$F(\chi) = F(\xi_0) + \varepsilon F'(\xi_0)(\xi_1 + \varepsilon \xi_2 + \ldots) + O(\varepsilon^2)$$

и аналогично для $P(\chi)$.

Решение в нулевом порядке можно записать в следующем виде:

$$\xi_0 = A(X,T)e^{-t} + g(X,T), \tag{6}$$

где $A(X,T)$ – постоянная интегрирования, в данном случае зависящая от медленных переменных. Функцию $A(X,T)$ и аналогичные ей функции, которые будут встречаться в дальнейшем анализе, будем называть **амплитудами диффузионного процесса**.

В первом порядке решение можно записать в такой форме:

$$\xi_1 = A_1(X,T)e^{-t} + e^{-t}\int_0^t e^{t'}\left[-\frac{\partial \xi_0}{\partial T} + \Delta_X F(\xi_0) - \xi_0^2\right]dt',$$

где $A_1(X,T)$ – постоянная интегрирования, зависящая от медленных переменных – амплитуда первого порядка. Первый интеграл в правой части уравнения для ξ_0 вычисляется просто:

$$I_1 = -e^{-t}\int_0^t e^{t'}\frac{\partial \xi_0}{\partial T}dt' = -e^{-t}t\frac{\partial A}{\partial T} - (1-e^{-t})\frac{\partial g}{\partial T}.$$

Второй интеграл требует более детального анализа. Для его вычисления воспользуемся разложением $F(\xi_0)$ в нуле и рассмотрим следующий интеграл:

$$I_2 = e^{-t}\int_0^t e^{t'}F(\xi_0)dt' = e^{-t}\int_0^t e^{t'}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F^{[k]}(0)}{k!}(A(X,T)e^{-t'}+g)^k dt' =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{F^{[k]}(0)}{k!}g^k + tA(X,T)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F^{[k]}(0)}{k!}kg^{k-1} +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{k}\frac{F^{[k]}(0)A^j(X,T)}{k!}C_k^j g^{k-j}\left[\frac{e^{(1-j)t}}{(1-j)} - 1\right].$$

Здесь $C_k^j = k!/(j!(k-j)!)$ – биномиальные коэффициенты. Заменой $F(\xi_0)$ на $P(\xi_0)$ аналогично вычисляется и интеграл

$$I_3 = e^{-t}\int_0^t e^{t'}P(\xi_0)dt'.$$

Интегралы I_1, I_2 и I_3 содержат в асимптотике при $t \to \infty$ растущие пропорционально t «резонансные» слагаемые. Для интеграла I_2 это второе слагаемое в правой части. Аналогичное слагаемое имеется и в интеграле I_3. Согласно стандартной процедуре исключения резонансов необходимо потребовать, чтобы эти слагаемые обратились в ноль в решении для ξ_1. Для первого порядка условие равенства нулю растущих резонансных слагаемых можно записать в виде уравнения для амплитуды $A(X,T)$:

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \Delta_X(D(g)A) + P'(g)A, \tag{7}$$

где коэффициент диффузии имеет вид

$$D(g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{[k]}(0)}{k!} k g^{k-1} = F'(g). \tag{8}$$

Здесь $F'(g)$ и $P'(g)$ – производные соответствующих функций по аргументу. Это уравнение является линейным диффузионным уравнением с коэффициентами, зависящими от параметра g – внешнего источника исходного уравнения.

4. Критерий асимптотического роста

Исследуя решения уравнения (7), можно получить условия роста пространственно периодических компонент распределения амплитуд диффузионного процесса. Общие выводы, касающиеся таких условий, будут различаться в зависимости от типа граничных условий, которые необходимо накладывать на решения уравнения (7). Согласно общему анализу ситуаций наблюдения пространственно периодических структур наиболее часто возникающие структуры имеют явную пространственную анизотропию, выражающуюся в том, что периодическая в трехмерном объеме ориентирована вдоль одной определенной оси, например, вдоль поверхности материала, а в ортогональном направлении быстро исчезает при удалении от нее. Такая анизотропия означает, что в качестве граничных условий для уравнения (7) следует выбирать вдоль одной оси условие затухания возмущений при удалении от некоторой поверхности (например, внешней), а вдоль самой этой поверхности ставить периодические граничные условия.

Чем может определяться выбор соответствующих направлений затухания или периодичности: для задач, связанных с внешним облучением, например лазерным, вдоль направления, ортогонального внешней поверхности, на которую падает излучение, следует ставить условие затухания на бесконечности. Обозначим эту ось через Z. Тогда имеем

$$A(X,Y,Z) \to 0,\ Z \to \infty. \tag{9}$$

В этом случае внешняя поверхность твердого тела и является основным элементом системы, вдоль которой формируются регулярные структуры в определенном слое, глубина которого обратно пропорциональна декременту затухания вдоль Z.

В случае радиационного облучения материалов эффект внешней поверхности менее выражен, но специфическую роль внутри самого материала могут играть поверхности двумерных протяженных дефектов (например, границы кристаллов), на которых поглощение внешнего излучения или частиц может существенно быть больше, чем вдали от них. В этом случае граничное условие (9) должно оставаться неизменным, но координата Z должна отсчитываться от соответствующей границы дефекта. Чтобы объединить оба типа поверхностей, внешних и внутренних, в дальнейшем по необходимости будем их называть базовыми. В случае отсутствия таких дефектов периодические структуры могут возникать в силу определенной периодичности начальных флуктуаций в материале. В этом случае периодичность должна наблюдаться во всем объеме или значительной его части, что наблюдается редко.

В случае $g = \text{const}$ и выполнения граничного условия (9) решения уравнения (7) следует искать в виде суперпозиции решений:

$$A(X,T) = e^{pT} e^{-QZ} (A_0 \cos(K,X) + B_0 \sin(K,X)), \qquad (10)$$

где инкремент медленного роста p связан с волновым вектором $K = (K_X, K_Y)$ по медленным координатам X, Y и декрементом затухания $Q > 0$ по координате Z соотношением

$$p = P'(g) - (K^2 - Q^2) D(g). \qquad (11)$$

Подставляя решение для $A(X,T)$ в решение (30), находим

$$\xi_0 = e^{\delta t} e^{-QZ} (A_0 \cos(K,X) + B_0 \sin(K,X)) + g. \qquad (12)$$

Здесь $\delta = p\varepsilon - 1$ – безразмерный параметр роста. Условием роста периодических составляющих является требование $\delta > 0$, которое после подстановки (11) приобретает форму неравенства:

$$\varepsilon P'(g) - 1 \geq a^2 (k^2 - q^2) D(g), \qquad (13)$$

где $k = K\sqrt{\varepsilon} / a$ – волновой вектор, а $q = \sqrt{\varepsilon} Q / a$ – декремент затухания. Отсюда следует, что в случае $D(g) \geq 0$ согласно (13) растущими Фурье-компонентами будут такие, которые удовлетворяют в размерном виде соотношению

$$k_0^2 + q^2 \geq k^2. \qquad (14)$$

Здесь $J'(z) = dJ / dz$, а k_0 – критическое волновое число, которое определяет минимальную длину волны, растущую со временем при заданном значении G:

$$k_0^2 = \frac{\gamma J'(G/\mu) - \mu}{D(G/\mu)}.$$

Это соотношение способно объяснить возникновение длинноволновых структур в среде с нелинейной диффузией и нелинейным источником, а также оценить основные параметры таких структур. В частности, (14) можно записать и в таком виде:

$$q^2 \geq k^2 + \frac{\mu - \gamma J'(G/\mu)}{D(G/\mu)}. \qquad (15)$$

из которого можно черпать информацию о толщине слоя, в котором формируется регулярная структура.

Из общего анализа соотношения (14) вытекает, что имеются два существенно различающихся варианта возникновения роста периодических компонентов диффузионного процесса. Первый из них определяется общим условием (14) при условии

$$D(G/\mu) = F'(G/\mu) > 0 \text{ и } \gamma J'(G/\mu) \ge \mu + q^2 D(G/\mu).$$

Второй вариант возможен в случае, если

$$D(G/\mu) = F'(G/\mu) < 0 \text{ и } \gamma J'(G/\mu) \le \mu + q^2 D(G/\mu).$$

Первый из этих вариантов в безразмерном (13) виде содержит условие:

$$\varepsilon P'(g) > 1. \tag{16}$$

Последнее входит в некоторое противоречие с тем, что слева стоит величина, пропорциональная малому параметру ε, а справа стоит величина, равная точно 1. Последнее, как кажется, означает, что это условие не может выполняться при условии малости ε. Однако следует иметь в виду, что порядок величины источника оценивался в предположении зависимости его от концентрации n, а в выражение (13) эта величина должна оцениваться в точке, где аргумент равен не концентрации, хоть и безразмерной, а безразмерной величине внешнего источника. В результате более правильно проводить вычисление знака величины в формуле (14) именно в размерном виде. В этом случае условие $\gamma J'(G/\mu) \ge \mu + q^2 D(G/\mu)$ вполне может выполняться.

Второй вариант соответствует обратному условию (16), и его следует назвать **антидиффузионной неустойчивостью**, поскольку коэффициент диффузии в пространстве медленных переменных для амплитуды процесса оказывается отрицательным. Такая возможность появляется для специального вида функциональной зависимости коэффициента диффузии в среде от концентрации дефектов (переносимой примеси) за счет того, что коэффициент диффузии $D(G/\mu)$ зависит теперь не от концентрации, а от величины внешнего источника. Примером может служить среда с коэффициентом диффузии вида $D(n) = D_0(n_0 + n)^{-1}$. При определенном знаке и величине отношения G/μ такой коэффициент может поменять свой знак, что как раз и будет означать появление антидиффузионной неустойчивости в среде.

Описанные трудности с выяснением конкретных свойств среды, при которых выполняются условия роста периодических компонентов, которые соответствуют условиям (16), показывают, что эти свойства должны быть достаточно специфическими. Это как раз и объясняет то обстоятельство, что периодические или регулярные структуры возникают в реальных средах не так часто.

5. Асимптотическое подавление неустойчивости саморекомбинацией

Полученные соотношения, дающие критерий роста длинноволновых периодических возмущений в среде с нелинейной диффузией и нелинейным источником, описывают лишь начальную стадию процесса. Конечной стадией является переход системы к наблюдаемой структуре в пределе при $t \to \infty$, которая по исходному предположению определяется всеми процессами нелинейной релаксации, которые описываются всей совокупностью слагаемых в разложении по малому параметру. Поэтому конечное состояние системы лишь приближенно описывается полученными соотношениями.

Поэтому для общего понимания того, как возникают регулярные структуры в рассматриваемых системах в пределе при $t \to \infty$, полезно рассмотреть какой-либо конкретный вариант нелинейного источника, на примере которого можно было бы получить более точные сведения о характере предельного перехода в системе. Таким вариантом может служить источник в форме квадратичного слагаемого в правой части.

Для этого рассмотрим специальный вариант уравнения (3) следующего вида:

$$\xi_t = \Delta F(\xi) - \xi - \xi^2 + g, \tag{17}$$

в котором нелинейное слагаемое ограничено квадратичной по концентрации функцией, имеющей порядок $O(1)$, вместо порядка $O(\varepsilon)$ в уравнении (3). Параметр при квадратичном слагаемом всегда может быть приведен к значению 1 масштабными преобразованиями координат и функций исходного уравнения. Роль квадратичного слагаемого в правой части уравнения (17) можно определить как параметр саморекомбинации дефектов в среде. Для отыскания членов ряда (29) выпишем решения в первых двух порядках. Подставляя (4) в (5) и приравнивая слагаемые в первых двух порядках нулю, находим

$$\xi_{0,t} = -\xi_0 - \xi_0^2 + g, \tag{18}$$

$$\xi_{1,t} = -\xi_1 - 2\xi_1\xi_0 - \frac{\partial \xi_0}{\partial T} + \Delta_X F(\xi_0). \tag{19}$$

Введем обозначение: $\lambda = \sqrt{1+4g}$. Тогда решение первого уравнения можно записать в виде

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\frac{(\lambda-1)e^{\lambda t} + A(X,T)(\lambda+1)}{e^{\lambda t} - A(X,T)}, \tag{20}$$

где $A(X,T)$ – постоянная интегрирования по t, зависящая от медленных переменных.

Решение в такой форме удобно исследовать только в случае, если $g > -1/4$. В случае $g < -1/4$, $\lambda = i\omega = i\sqrt{|1+4g|}$, ω – вещественное и решение в нулевом порядке оказывается сингулярным. Поэтому мы не будем его рассматривать в данной работе, ограничившись случаем $g > -1/4$.

Решение в случае вещественного λ в первом порядке можно записать следующим образом:

$$\xi_1 = A_1(X,T)e^{\theta(t,X,T)} + e^{\theta(t,X,T)}\int_0^t \left(-\frac{\partial \xi_0}{\partial T} + \Delta_X F(\xi_0)\right)e^{-\theta(t',X,T)}dt' =$$

$$= A_1(X,T)e^{\theta(t,X,T)} + I_1 + I_2. \tag{21}$$

Здесь

$$\theta = \lambda t - 2\ln(e^{\lambda t} - A(X,T)),\ e^{\theta(t,X,T)} = e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - A(X,T))^{-2}$$

и

$$I_1 = -e^{\theta(t,X,T)}\int_0^t \xi_{0,T} e^{-\theta(t',X,T)}dt',\ I_2 = e^{\theta(t,X,T)}\int_0^t e^{-\theta(t',X,T)}\Delta_X F(\xi_0)dt'. \quad (22)$$

Используя (30), имеем

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial T} = \lambda \dot{A}(X,T)e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - A(X,T))^{-2},$$

откуда находим

$$I_1 = -t\lambda \dot{A}(X,T)e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - A(X,T))^{-2}.$$

Вычисление второго интеграла оказывается более громоздким. Приведем здесь лишь представление функции $F(\xi_0)$, а все остальные вычисления воспроизведены в приложении к данной статье. Имеем

$$F(\xi_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{[k]}(0)}{k!}\left(\frac{1}{2}\frac{(\lambda-1)e^{\lambda t} + A(X,T)(\lambda+1)}{e^{\lambda t} - A(X,T)}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} R_{k,j}(\lambda)C_k^j A^{k-j}(X,T)\frac{e^{\lambda j t}}{(e^{\lambda t} - A(X,T))^k},$$

здесь

$$R_{k,j}(\lambda) = \frac{F^{[k]}(0)}{2^k k!}(\lambda-1)^j(\lambda+1)^{k-j}.$$

После этих предварительных преобразований расчет интеграла I_2 проводится по аналогии с тем, как это было проделано в предыдущих разделах. В результате вычислений интеграла I_2 (см. приложение) устанавливаем, что условием отсутствия секулярных слагаемых в первом порядке является уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \Delta_X(D(g)A), \quad (23)$$

где

$$D(g) = F'\left(\frac{\lambda-1}{2}\right) = \frac{\tau_0}{X_0^2}D\left(\frac{\sqrt{1+4g}-1}{2}\right). \quad (24)$$

Условие роста периодических составляющих (в случае квадратичной нелинейности) имеет свои отличия по сравнению со случаем ее отсутствия. Рассмотрим решение (23) вида, аналогичного (10):

$$A = C_0\cos((K,X)+\varphi)e^{-QZ}e^{pT}.$$

Здесь C_0 и φ – постоянные. Подставляя это решение в (30), в нулевом порядке получаем

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\frac{(1+\lambda)e^{(\lambda - p\varepsilon)t} - C_0 e^{-QZ}\cos((K,X)+\varphi)(1-\lambda)}{e^{(\lambda - p\varepsilon)t} - C_0 e^{-QZ}\cos((K,X)+\varphi)}. \tag{25}$$

Это решение при $t \to \infty$ будет иметь периодическое решение только в том случае, если будет выполнено условие

$$\lambda - p\varepsilon = \lambda + \varepsilon(K^2 - Q^2)D(g) = 0. \tag{26}$$

В случае, если это соотношение не выполняется, то решение (25) стремится при $t \to \infty$ к пространственно однородной функции.

Условие (26) можно переписать в виде

$$q^2 - k^2 = \frac{1}{2D(g)}\sqrt{1+4g}. \tag{27}$$

Отсюда находим, что в случае стандартного условия $D(g) > 0$ декремент затухания должен быть существенно большим по сравнению с модулем волнового числа возникающей периодической структуры, т.е. структура должна возникать в очень тонком слое вблизи базовой поверхности по сравнению с длиной волны периодической структуры. Ситуация изменяется на обратную, если $D(g) < 0$. Этот вариант относится к явлению анитидиффузионной неустойчивости. В этом случае регулярная структура будет возникать в очень большом по толщине слое по сравнению с длиной волны структуры.

В случае, если это условие (27) не выполняется, то в пределе $t \to \infty$ решение описывает однородное по ортогональному к Z пространству распределение. Это показывает, что при наличии немалого квадратичного источника в системе в пределе все флуктуации в нулевом порядке исчезают и регулярная структура может появиться лишь на некоторое время в системе, а затем диссипирует за счет диффузии и квадратичной нелинейности.

6. Уравнение нелинейной диффузии нескольких типов дефектов

Рассмотренный подход может быть перенесен на более общий случай, когда в среде имеется не один тип дефектов, а, как минимум, два, например вакансии и междоузлия. Фактически отличие рассмотренной задачи от задачи с несколькими типами дефектов состоит лишь в числе уравнений. Это связано с тем, что предложенный подход применим для почти любых типов функциональной формы коэффициента диффузии и нелинейного источника. Поэтому, как кажется, нет особой необходимости проводить отдельные исследования подобных систем, поскольку критерии роста будут примерно такими же, как и в случае с одним типом дефектов. Однако ситуация может существенно отличаться, поскольку критерий роста периодических составляющих будет связан с системой неравенств, что может существенно изменить реальные условия их выполнения. Поэтому мы рассмотрим одну из часто используемых моделей динамики переноса двух типов дефектов в среде, где одним из основных нелинейных процессов является процесс рекомбинации дефектов друг на друге.

Уравнения диффузионного переноса дефектов с учетом их рекомбинации и возникновения за счет внешнего источника можно представить в следующей форме:

$$\frac{\partial n_i}{\partial \tau} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left(D_i(\mathbf{n}) \frac{\partial n_i}{\partial z^\alpha} \right) - M_i n_i - J_i(\mathbf{n}) + G_i,\ i = 1,\ldots,M. \qquad (28)$$

Здесь τ – время; z^α – пространственные координаты; $D_i(\mathbf{n})$ – коэффициенты диффузии каждого компонента; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_M)$ – вектор концентраций компонентов среды; $J_i(\mathbf{n})$ – нелинейные источники. Обезразмерим эти уравнения, вводя следующие масштабные коэффициенты: N_0 – общий масштаб числа дефектов; X_0 – масштаб длины; τ_0 – масштаб времени, и соответствующие безразмерные переменные: $x^\alpha = z^\alpha / X_0$, $u_i = n_i / N_0$, $t = \tau / \tau_0$. В результате приходим к уравнениям в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(F_i(\mathbf{u}) \frac{\partial u_i}{\partial x^\alpha} \right) - \mu_i u_i - \varepsilon j_i(\mathbf{u}) + \gamma_i,\ i = 1,\ldots,M. \qquad (29)$$

где безразмерные коэффициенты имеют следующий вид:

$$\mu_i = M_i \tau_0,\ j_i = J_i \tau_0 N_0 / \varepsilon,\ \ F_i = D_i \tau_0 / X_0^2,\ \ \gamma_i = G_i \tau_0 / N_0,$$

и принимают значения порядка $O(1)$. Здесь $0 < \varepsilon << 1$ – малое безразмерное число. Таким образом, в модели предполагается, как и раньше, наличие малого параметра ε, характеризующего малость нелинейных эффектов рекомбинации по сравнению с эффектами диффузии и диссипации.

Как и для предыдущих моделей, введем медленные переменные времени $T = \varepsilon t$ и координат $X^\alpha = \sqrt{\varepsilon} x^\alpha$ ($\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3)$). В этом случае переменные u_i являются функциями быстрого времени t и медленных переменных $\mathbf{X}, T$: $u_i = u_i(t, \mathbf{X}, T, \varepsilon)$. В результате уравнения (29) приводятся к виду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \mu_i u_i - \gamma_i = -\varepsilon \frac{\partial u_i}{\partial T} - \varepsilon j_i(\mathbf{u}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X^\alpha}\left(F_i(\mathbf{u}) \frac{\partial u_i}{\partial X^\alpha} \right),\ i = 1,\ldots,M.$$

Решения будем искать в виде рядов по малому параметру ε:

$$u_i(t, X, T, \varepsilon) = u_i^{(0)}(t, \mathbf{X}, T) + u_i^{(1)}(t, \mathbf{X}, T)\varepsilon + O(\varepsilon^2),\ i = 1,\ldots,M, \qquad (30)$$

получаем для первых двух элементов рядов следующие уравнения:

$$u_{i,t}^{(0)} + \mu_i u_i^{(0)} = g_i,\ i = 1,\ldots,M,$$

$$u_{i,t}^{(1)} + \mu_i u_i^{(1)} = -j_i(\mathbf{u}^{(0)}) - \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X^\alpha}\left(F_i(\mathbf{u}^{(0)}) \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial X^\alpha} \right),\ i = 1,\ldots,M.$$

Как и раньше, решение в нулевом порядке имеет следующий вид:

$$u_i^{(0)} = A_i(\mathbf{X},T)e^{-\mu_i t} + g_i,\ i = 1,\ldots,M, \tag{31}$$

где $A_i(\mathbf{X},T)$ – амплитуды процесса в нулевом порядке, $g_i = \gamma_i / \mu_i = \mathrm{const}$. Аналогично, в первом порядке решение можно записать в такой форме:

$$u_i^{(1)} = B_i(\mathbf{X},T)e^{-\mu_i t} + \tag{32}$$

$$+e^{-\mu_i t}\int_0^t e^{\mu_i t'}\left[-\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial T} - j_i(\mathbf{u}^{(0)}) + \frac{\partial}{\partial X^\alpha}\left(F_i(\mathbf{u}^{(0)})\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial X^\alpha}\right)\right]dt',\ i = 1,\ldots,M,$$

где $B_i(\mathbf{X},T)$ – амплитуды в первом порядке.

Вычисления правой части (32) проводятся по той же схеме, что и в случае одного уравнения. Предположим вначале, что все μ_i попарно не равны друг другу: $\mu_i \neq \mu_j,\ i \neq j = 1,\ldots,M$. Тогда условия исключения резонансных слагаемых в решении первого порядка можно записать в виде следующей системы уравнений для амплитуд нулевого порядка $A_i(\mathbf{X},T)$:

$$\frac{\partial A_i}{\partial T} = \Delta_X\left(P_i(\mathbf{g})A_i\right) - \frac{\partial j_i(\mathbf{g})}{\partial g_i}A_i,\ i = 1,\ldots,M, \tag{33}$$

где $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_M)$, величины диффузии имеют вид

$$P_i(\mathbf{g}) = \frac{\tau_0}{X_0^2}F_i(\mathbf{g}),\ i = 1,\ldots,M. \tag{34}$$

В случае, если некоторые коэффициенты μ_i равны друг другу, то уравнения будут иметь несколько иной вид, а именно:

$$\frac{\partial A_i}{\partial T} = \Delta_X\left(P_i(\mathbf{g})A_i\right) - \sum_{j=1}^{M} S_{ij}(\mathbf{g})A_j,\ i = 1,\ldots,M. \tag{35}$$

Здесь $S_{ij}(g)$ вычисляются следующим образом:

$$S_{ij}(\mathbf{g}) = \begin{cases} \dfrac{\partial j_i(\mathbf{g})}{\partial g_j}, & \mu_i = \mu_j; \\ 0, & \mu_i \neq \mu_j. \end{cases}$$

Отметим, что требование равенства некоторых коэффициентов μ_i при выводе уравнений (35) в действительности может несколько ослаблено. Это можно сделать, полагая, что в исходных уравнениях некоторые числа μ_i совпадают не точно, а отличаются друг относительно друга на величину порядка ε. То есть можно полагать, что в реальности числа M_i и M_j, отвечающие совпадающим $\mu_i = \mu_j = \mu_*$, в действительности можно представить в виде

$$M_i = \frac{1}{\tau_0}(\mu_* + \varepsilon m_i),\ M_j = \frac{1}{\tau_0}(\mu_* + \varepsilon m_j). \quad (36)$$

В этом случае числа m_i и m_j попадают в выражения для функций $S_{ij}(\mathbf{g})$.

Анализ роста периодических составляющих со временем при их затухании вдоль координаты Z остается в общем случае прежним и сводится к анализу решений вида

$$A_i = C_i e^{pT} e^{-QZ} \cos((K, X) + \varphi),\ i = 1, \ldots, M.$$

Критерием роста компоненты среды с номером i является условие

$$\varepsilon p(\mathbf{g}) - \mu_i > 0,$$

где величина $p(\mathbf{g})$ вычисляется как решение дисперсионного уравнения системы (33) или (34).

Частным случаем обобщенной системы является случай динамики двух типов дефектов ($M = 2$) – вакансий и междоузлий. В простейших вариантах таких моделей в качестве нелинейных источников рассматривают источники, описывающие взаимную рекомбинацию этих дефектов в форме

$$J_1(n_1, n_2) = J_2(n_1, n_2) = \gamma n_1 n_2.$$

Коэффициенты диффузии этих компонентов различаются и могут зависеть от их концентраций. В случае различающихся существенно значений μ_1, μ_2 : $\mu_1 \neq \mu_2$ система распадается на два независимых уравнения, дисперсионные условия для каждого из которых будут иметь такой же вид, как и для одного уравнения диффузии (5). В этом случае условия роста будут оставаться теми же, что и раньше, с той лишь разницей, что для разных типов дефектов они будут отличаться в силу отличия в коэффициентах диффузии и величин μ_1, μ_2. В случае же выполнения условий типа (35) дисперсионное условие примет более сложный вид и является квадратичным относительно p, что указывает на существование более сложных типов условий роста периодических составляющих в среде при наличии «резонанса» скоростей линейной релаксации дефектов.

Заключение

Рассмотренные выше эффекты могут возникать в различных системах. Примером могут служить явления, происходящие в поверхностном слое полупроводников под действием внешнего лазерного облучения [1–6]. Проведем анализ условий, при которых возможно возникновение периодических структур в соответствии с полученными ранее в данной работе критериями.

В качестве простого примера рассмотрим динамику генерации неравновесных носителей (дефектов) в поле лазерного излучения, возникающих за счет его взаимодействия с генерируемой им же поверхностной волной (плазмон-поляритоном). В этом случае на поверхности облучаемого полупроводника образуется большое количество свободных носителей дефектов (так называемая электронно-дырчатая плазма), образующих слой частичной металлизации поверхности. В этом случае при больших концентрациях электронно-дырочной плазмы вступает в действие механизм так называемой быстрой Оже-рекомбинации носителей. Скорость Оже-рекомбинации в уравнении (28) определяется параметром $\gamma J(n)$, где $J(n) \sim n^3$, что определяет нелинейный характер этого процесса. При этом для полупроводниковых структур константа γ варьируется в пределах $\gamma = -(1-10)\cdot 10^{-31}$ см^6/с, что, действительно, можно рассматривать как малый параметр в (28). Используя эту оценку для γ и полагая $\mu \simeq 10^8 - 10^9$ с$^{-1}$, $D(G/|\mu|) \simeq 10^2$ см^{2}с$^{-1}$ [5], получаем в (14) критическое значение $k_0^2 = 10^6$ см$^{-2}$, что соответствует длине пространственной периодичности $\lambda_0 \simeq 10^{-3}$ см.

Данный простой пример показывает, что при использовании реальных параметров сред полученные соотношения вполне могут объяснить появление длинноволновых пространственных регулярных структур в экспериментах по облучению материалов. Поэтому полученные критерии роста вполне пригодны для описания реальных экспериментов после выяснения функциональной зависимости коэффициентов диффузии и нелинейных источников дефектов от концентраций. Универсальность предлагаемого подхода позволяет использовать его как для описания экспериментов облучения материалов лазерным излучениям, так и излучениями типа нейтронов, γ-гамма фотонов и т.д.

Приложение

Рассмотрим вычисление следующего слагаемого в уравнении (22):

$$\Delta_X F(\xi_0) = \Delta_X \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} R_{k,j}(\lambda) C_k^j e^{\lambda j t} \left(\frac{A^{k-j}}{(e^{\lambda t} - A)^k} \right) \right]. \tag{37}$$

Имеем

$$\Delta_X \left[A^{k-j} (e^{\lambda t} - A)^{-k} \right] = A^{k-j-1}((k-j)e^{\lambda t} + jA)(e^{\lambda t} - A)^{-k-1} \Delta_X A +$$

$$+(\nabla_X A)^2 \frac{A^{k-j-2}((k-j)(k-j-1)e^{2\lambda t} + 2(j+1)(k-j)Ae^{\lambda t} + j(j+1)A^2)}{(e^{\lambda t} - A)^{k+2}},$$

здесь

$$(\nabla_X A)^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial A}{\partial X^\alpha} \right)^2 .$$

Для вычисления интегралов в этих выражениях необходимо вычислять интегралы вида

$$I_{mn} = \int_0^t e^{\lambda m t'} (e^{\lambda t'} - A)^{-n} \, dt' \tag{38}$$

с различными значениями m и n, зависящими от j и k. При вычислении этих интегралов необходимо получить выражения не для всех слагаемых, а лишь для тех, которые будут содержать множитель, пропорциональный t. В связи с этим интегралы I_{mn} можно в случае $n \le m$ представить в виде

$$I_{mn} = C_{m-1}^{n-1} A^{m-n} t + \frac{1}{\lambda} C_{m-1}^{n-1} A^{m-n} \ln \frac{1 - e^{-\lambda t} A}{1 - A} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0, j \ne n-1}^{m-1} C_{m-1}^{j} \frac{A^{m-n} (e^{\lambda t} - A)^{j-n+1}}{j-n+1} \Bigg|_0^t . \qquad (39)$$

В случае $n > m$, слагаемые, пропорциональные t, в I_{mn} отсутствуют. Таким образом, для вычисления секулярных слагаемых в интеграле I_2 достаточно вычислить его только с учетом первого слагаемого в I_{mn}. Обозначим часть интегралов I_{mn} и I_2, содержащих слагаемые с множителем t, через $I_{mn}^{(t)}$ и $I_2^{(t)}$ соответственно:

$$I_{mn}^{(t)} = C_{m-1}^{n-1} A^{m-n} t.$$

В результате имеем

$$I_2^{(t)} = te^{\Theta} \Delta_X A \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} R_{k,j}(\lambda) \Big[(k-j) C_k^j C_{j-1}^{k-2} + j C_k^j C_{j-2}^{k-2} \Big] + te^{\Theta} \frac{1}{A} (\nabla_X A)^2 \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} R_{k,j}(\lambda) C_k^j \Big[(k-j)(k-j-1) C_j^{k-1} + 2(j+1)(k-j) C_{j-1}^{k-1} + j(j+1) C_{j-2}^{k-1} \Big].$$

Поскольку в качестве коэффициентов в суммы входит произведение биномиальных коэффициентов, они будут отличаться от нуля в случае, если нижний индекс в записи коэффициента $C_q^p C_m^n$ будет удовлетворять условиям: $n \ge m$ и $q \ge p$. В силу этого находим, что сумма по j будет содержать не более двух слагаемых с $j = k$ и $j = k - 1$. В результате имеем

$$I_2^{(t)} = te^{\Theta} \Delta_X A \sum_{k=0}^{\infty} \Big[R_{k,k}(\lambda) k + R_{k,k-1}(\lambda) k \Big].$$

Слагаемые, пропорциональные $(A_X)^2 / A$, обращаются в нуль. Подставляя сюда выражение для $R_{k,j}$, окончательно находим

$$I_2^{(t)} = te^{\Theta} \Delta_X A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{[k]}(0)}{2^{k-1} k!} (\lambda - 1)^{k-1} k \left[\frac{1+\lambda}{2} + \frac{\lambda - 1}{2} \right] = te^{\Theta} \Delta_X A \lambda F' \left(\frac{\lambda - 1}{2} \right).$$

Список литературы

1. **Ахманов, С. А.** Воздействие мощного лазерного излучения на поверхность полупроводников и металлов: нелинейно-оптические эффекты и нелинейно-оптическая диагностика / С. А. Ахманов, В. И. Емельянов Н. И. Коротеев, В. Н. Семиногов // Успехи физических наук. – 1985. – Т. 147, №12. – С. 675–745.
2. Формирование квазипериодических нано- и микроструктур на поверхности кремния под действием ИК и УФ фемтосекундных лазерных импульсов / Е. В. Голосов, А. А. Ионин, С. И. Кудряшов, С. В. Макаров, Л. В. Селезнев, Д. В. Синицын // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2009. – Т. 90, № 2 – С. 116–121.
3. Mechanism for self-formation of periodic grating structures on a metal surface by a femtosecond pulse / M. S. Sakabe, M. Hashida, S. Tokita, S. Namba, K. Okamura // Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 79. – P. 033409–033412.
4. **Макин, В. С.** Поверхностные плазмон-поляритонные моды и наноструктурирование полупроводников фемтосекундными лазерными импульсами / В. С. Макин, Ю. И. Пестов, Р. С. Макин, А. Я. Воробьев // Оптический журнал. – 2009. – Т. 76, № 9. – С. 38–44.
5. **Володин, Б. Л.** Взрывное накопление точечных дефектов как механизм многоимпульсного разрушения поглощающих сред / Б. Л. Володин, В. И. Емельянов, Ю. Г. Шлыков // Квантовая электроника. – 1993. – Т. 20, № 1. – С. 57–61.
6. **Jonstsons, A.** The Nature of Dislocation Loops in neutron Irradiated Zirconium / A. Jonstsons, P. M. Kelly, R. G. Blayk // Journal of Nuclear Materials. – 1977. – Vol. 66. – P. 236–242.
7. **Turkin, A. A.** Formation of dislocation patterns under irradiation / A. A. Turkin, V. I. Dubinko // Appl. Phys. 1994. – Vol. A58. – P. 35–39.
8. **Самарский, А. А.** Математическое моделирование (Идеи. Методы. Примеры) / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М. : Наука, 1997. – 320 с.
9. **Аристов, С. Н.** Класс точных решений уравнений Навье-Стокса для обыкновенных дифференциальных уравнений / С. Н. Аристов // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т. 40, № 5. – С. 51–54.
10. **Журавлев, В. М.** Точные решения уравнений нелинейной диффузии $ut = D\Delta u + + \lambda u$ в двумерном координатном пространстве / В. М. Журавлев // Теоретическая и математическая физика. – 2000.– Т. 124, № 2. – С. 265–278.
11. **Журавлев, В. М.** Принцип суперпозиции и точные решения уравнения нелинейной диффузии / В. М. Журавлев // Теоретическая и математическая физика. – 2015. – Т. 183, № 1. – С. 36–50.

References

1. Akhmanov S. A., Emel'yanov V. I., Koroteev N. I., Seminogov V. N. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Progress of physical sciences]. 1985, vol. 147, no. 12, pp. 675–745.
2. Golosov E. V., Ionin A. A., Kudryashov S. I., Makarov S. V., Seleznev L. V., Sinitsyn D. V. *Pis'ma v zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki* [Letters to the Journal of experimental and theoretical physics]. 2009, vol. 90, no. 2, pp. 116–121.
3. Sakabe M. S., Hashida M., Tokita S., Namba S., Okamura K. *Phys. Rev. B*. 2009, vol. 79, pp. 033409–033412.
4. Makin V. S., Pestov Yu. I., Makin R. S., Vorob'ev A. Ya. *Opticheskiy zhurnal* [Optical journal]. 2009, vol. 76, no. 9, pp. 38–44.
5. Volodin B. L., Emel'yanov V. I., Shlykov Yu. G. *Kvantovaya elektronika* [Quantum electronics]. 1993, vol. 20, no. 1, pp. 57–61.
6. Jonstsons A., Kelly P. M., Blayk R. G. *Journal of Nuclear Materials*. 1977, vol. 66, pp. 236–242.
7. Turkin A. A., Dubinko V. I. *Appl. Phys*. 1994, vol. A58, pp. 35–39.

8. Samarskiy A. A., Mikhaylov A. P. *Matematicheskoe modelirovanie (Idei. Metody. Primery)* [Math modeling (Ideas. Methods. Examples)]. Moscow: Nauka, 1997, 320 p.
9. Aristov C. N. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied mechanics and technical physics]. 1999, vol. 40, no. 5, pp. 51–54.
10. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2000, vol. 124, no. 2, pp. 265–278.
11. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2015, vol. 183, no. 1, pp. 36–50.

Журавлев Виктор Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической физики, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: zhvictorm@gmail.ru

Zhuravlev Viktor Mikhaylovich
Doctor of physical and mathematical sciences, sub-department of theoretical physics, Ulyanovsk State University (42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

Золотовский Игорь Олегович
кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: rafzol.14@mail.ru

Zolotovskiy Igor' Olegovich
Candidate of physical and mathematical sciences, leading researcher, Ulyanovsk State University (42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

Морозов Виталий Михайлович
студент, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: aieler@rambler.ru

Morozov Vitaliy Mikhaylovich
Student, Ulyanovsk State University (42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

УДК 538.913 538.931 538.971 539.219.3

Журавлев, В. М.

Об условиях возникновения регулярных структур в конденсированных средах под действием внешнего излучения / В. М. Журавлев, И. О. Золотовский, В. М. Морозов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 144–162.